**Derivada parcial**

En [matemática](http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica), una **derivada parcial** de una [función](http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_%28matem%C3%A1tica%29) de diversas variables, es su [derivada](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada) respecto a una de esas variables manteniendo las otras como constantes. Las derivadas parciales son útiles en [cálculo vectorial](http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo_vectorial) y [geometría diferencial](http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_diferencial).

La derivada parcial de una función *f* respecto a la variable *x* se representa con cualquiera de las siguientes notaciones equivalentes:



Donde es la letra 'd' redondeada, conocida como la 'd de Jacobi'.

Cuando una magnitud es función de diversas [variables](http://es.wikipedia.org/wiki/Variable_%28matem%C3%A1ticas%29) (,,,), es decir:

Al realizar esta derivada obtenemos la expresión que nos permite obtener la pendiente de la recta tangente a dicha función en un punto dado. Esta recta es paralela al plano formado por el eje de la incógnita respecto a la cual se ha hecho la derivada y el eje z.

Analíticamente el [gradiente](http://es.wikipedia.org/wiki/Gradiente) de una función es la máxima pendiente de dicha función en la dirección que se elija. Mientras visto desde el álgebra lineal, la dirección del gradiente nos indica hacia donde hay mayor variación en la función.

**Introducción**

Supongamos que es una función de más de una variable, es decir una función real de variable vectorial. Para el caso,

Un gráfico de *z* = *x*2 + *xy* + *y*2. Queremos encontrar la derivada parcial en (1, 1, 3) que deja a *y* constante; la correspondiente línea tangente es paralela al eje *x*.

Es difícil describir la derivada de tal función, ya que existe un número infinito de líneas tangentes en cada punto de su superficie. La derivación parcial es el acto de elegir una de esas líneas y encontrar su pendiente. Generalmente, las líneas que más interesan son aquellas que son paralelas al eje *x*, y aquellas que son paralelas al eje *y*.

Este es un corte del gráfico a la derecha de *y* = 1.

Una buena manera de encontrar los valores para esas líneas paralelas es la de tratar las otras variables como constantes mientras se deja a variar sólo una. Por ejemplo, para encontrar la línea tangente de la función de arriba en (1, 1, 3) que es paralela el eje *x*, tratamos a la variable *y* como constante. El gráfico de la función y el plano y = 1 se muestran a la derecha. A la izquierda, vemos cómo se ve la función, en el plano *y* = 1. Encontrando la línea tangente en este gráfico, descubrimos que la pendiente de la línea tangente de *ƒ* en (1, 1, 3) que es paralela al eje x es tres. Que escribimos:



en el punto (1, 1, 3),

o como "La derivada parcial de *z* con respecto a *x* en (1, 1, 3) es 3."

**Ejemplos**

El volumen de un cono depende de la altura (h) y el radio (r)

* Considera el volumen *V* de un [cono](http://es.wikipedia.org/wiki/Cono_%28geometr%C3%ADa%29), este depende de la altura *h* del cono y su radio *r* de acuerdo con la fórmula



Las derivadas parciales de *V* respecto a *r* y *h* son:



* Otro ejemplo, dada la función tal que:



la derivada parcial de respecto de es:



mientras que con respecto de es:



**Definición forma**

Como las derivadas en una variable, las derivadas parciales están definidas como el [límite](http://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADmite_matem%C3%A1tico). Donde *U* es un subconjunto abierto de **R***n* y *f* : *U* → **R** una función. Definimos derivada parcial de *f* en el punto ***a*** = (*a*1,..., *an*) ∈ *U* con respecto a la *i*-ésima variable *xi* como:



O visto respecto a la derivada direccional:



donde es el vector unitario del eje respecto al que se deriva ().

Incluso si todas las derivadas parciales existen en el punto *a*, la función no necesariamente es continua en ese punto. Sin embargo, si todas las derivadas parciales existen **alrededor** de *a* y son continuas, entonces la función no sólo es continua sino además [diferenciable](http://es.wikipedia.org/wiki/Diferenciable) cerca de *a*. En este caso, *f* es una función C1.

**Ecuación diferencial**

Una **ecuación diferencial** es una [ecuación](http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n) en la que intervienen [derivadas](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada) de una o más funciones desconocidas. Dependiendo del número de variables independientes respecto de las que se deriva, las ecuaciones diferenciales se dividen en:

* [**Ecuaciones diferenciales ordinarias**](http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_diferencial_ordinaria): aquellas que contienen derivadas respecto a una sola variable independiente.
* [**Ecuaciones en derivadas parciales**](http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_en_derivadas_parciales): aquellas que contienen derivadas respecto a dos o más variables.

**Introducción**

Una ecuación diferencial es una ecuación que incluye expresiones o términos que involucran a una función matemática incógnita y sus derivadas. Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales son:

* 

es una ecuación diferencial ordinaria, donde representa una función no especificada de la variable independiente , es decir, , es la derivada de con respecto a .

* La expresión 

es una ecuación en derivadas parciales.

A la variable dependiente también se le llama función incógnita (desconocida). La [resolución de ecuaciones](http://es.wikipedia.org/wiki/Resoluci%C3%B3n_de_ecuaciones) diferenciales es un tipo de [problema matemático](http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_matem%C3%A1tico) que consiste en buscar una función que cumpla una determinada ecuación diferencial. Se puede llevar a cabo mediante un método específico para la ecuación diferencial en cuestión o mediante una transformada (como, por ejemplo, la [transformada de Laplace](http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Laplace)).

**Ecuación diferencial**

Una **ecuación diferencial** es una [ecuación](http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n) en la que intervienen [derivadas](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada) de una o más funciones desconocidas. Dependiendo del número de variables independientes respecto de las que se deriva, las ecuaciones diferenciales se dividen en:

* [**Ecuaciones diferenciales ordinarias**](http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_diferencial_ordinaria): aquellas que contienen derivadas respecto a una sola variable independiente.
* [**Ecuaciones en derivadas parciales**](http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_en_derivadas_parciales): aquellas que contienen derivadas respecto a dos o más variables.

**Introducción**

Una ecuación diferencial es una ecuación que incluye expresiones o términos que involucran a una función matemática incógnita y sus derivadas. Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales son:

* 

es una ecuación diferencial ordinaria, donde representa una función no especificada de la variable independiente , es decir, , es la derivada de con respecto a .

* La expresión 

es una ecuación en derivadas parciales.

A la variable dependiente también se le llama función incógnita (desconocida). La [resolución de ecuaciones](http://es.wikipedia.org/wiki/Resoluci%C3%B3n_de_ecuaciones) diferenciales es un tipo de [problema matemático](http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_matem%C3%A1tico) que consiste en buscar una función que cumpla una determinada ecuación diferencial. Se puede llevar a cabo mediante un método específico para la ecuación diferencial en cuestión o mediante una transformada (como, por ejemplo, la [transformada de Laplace](http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Laplace)).

**Derivada covariante**

El [transporte paralelo](http://es.wikipedia.org/wiki/Transporte_paralelo) de un vector a lo largo de una curva cerrada sobre la esfera, que al igual que el concepto de derivada covariante se basa en la noción de [conexión matemática](http://es.wikipedia.org/wiki/Conexi%C3%B3n_%28matem%C3%A1tica%29). El ángulo después de recorrer una vez la curva es proporcional al área dentro de la curva.

La **derivada covariante** () es una generalización del concepto de [derivada parcial](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada_parcial) () que permite extender el cálculo diferencial sobre con coordenadas cartesianas al caso de [coordenadas curvilíneas](http://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_curvil%C3%ADneas) en (y también al caso todavía más general de [variedades diferenciables](http://es.wikipedia.org/wiki/Variedad_diferenciable)).

**Introducción**

Introduciremos primero el caso de . Supongamos que tenemos *n* campos vectoriales que en cada punto forman una base vectorial y un [campo vectorial](http://es.wikipedia.org/wiki/Campo_vectorial) [contravariante](http://es.wikipedia.org/wiki/Covariancia_y_contravariancia) adicional de tal manera que este campo puede expresarse en términos de la base anterior:



Donde son las componentes del vector en dicha base. Si se usan coordenadas curvilíneas , los vectores tangentes a las curvas coordenadas cambian de punto a punto. Eso implica que aún cuando el campo vectorial sea constante en general sus coordenadas en la base elegida no serán constantes y en general sucederá que la derivada covariante ():



Ya que también es necesario considerar la variación de orientación de la base vectorial al pasar de un punto a otro, es decir, para evaluar la derivada (covariante) anterior necesitamos evaluar:



Donde el término segundo adicional da cuenta de como cambia la base vectorial al recorrer una línea coordenada curvilínea. Es decir cuando se usan coordenadas cartesianas en las líneas coordenadas son líneas rectas paralelas a los ejes coordenados, y de alguna manera en cada punto la base vectorial escogida para medir las coordenadas de un campo vectorial en todos los puntos están "sincronizadas". Pero en coordenadas curvilíneas al pasar de un punto a otro, los vectores tangentes a las líneas coordenadas usados como base no coindirán de un punto a otro y es necesario computar su variación al cambiar de punto. En general los vectores no sólo dependen del punto es necesario especificar como se "conectan" los vectores en diferentes puntos y para ello se define una [conexión](http://es.wikipedia.org/wiki/Conexi%C3%B3n_%28matem%C3%A1tica%29) que en el caso de puede representarse como un conjunto de coeficientes:

([2](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada_covariante#Eqnref_2))



Los coeficientes se llaman [símbolos de Christoffel](http://es.wikipedia.org/wiki/S%C3%ADmbolos_de_Christoffel) y definen localmente la conexión. Juntanto los resultados de ([1](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada_covariante#Equation_1)) y ([2](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada_covariante#Equation_2)) la derivada covariante parcial de un campo vectorial puede expresarse mediante:

([3a](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada_covariante#Eqnref_3a))



Usando el [convenio de sumación de Einstein](http://es.wikipedia.org/wiki/Convenio_de_sumaci%C3%B3n_de_Einstein) y renombrando los índices la expresión anterior puede escribirse simplemente como:

([3b](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada_covariante#Eqnref_3b))



La expresión entre paréntesis representa las componentes de la derivada covariante del vector contravariante . Análogamente dada una curva se define la derivada covariante temporal a lo largo de dicha curva como:



**Caso Euclídeo**

La necesidad de la generalización de la derivada ordinaria en se aprecia cuando su usan coordenadas curvilíneas como se ha dicho. Basta el movimiento de una partícula expresado en coordenadas cartesianas y luego el mismo movimiento expresado en coordenadas polares, por ejemplo, consideremos una masa puntual que se mueve a lo largo de la trayectoria recta por:



Es decir, el punto se mueve con una velocidad uniforme a lo largo de una recta, esto puede verse de manera sencilla, si se calculan las velocidades y las aceleraciones de la partícula:



Donde se ha usado la notación y .

Ahora consideramos el cálculo de la aceleración en coordenadas polares. Como la partícula se mueve sobre una recta la distancia al origen y el ángulo polar estarán relacionados mediante la relación:



Las coordenadas de la velocidad de la partícula en estas coordenadas pueden determinarse mediante cálculo directo o cambiando de base a partir de la componentes cartesianas:



Puesto que la partícula se mueve a velocidad constante el vector aceleración debería resultar nulo. De acuerdo a lo discutido anteriormente, las componentes del vector aceleración pueden obtenerse mediante las coordenadas covariantes:



Es importante notar como en este caso las derivadas parciales ordinarias no coinciden con las componentes de la aceleración:



Ya que en coordenadas polares los vectores de la base varían de punto a punto, y es por ello que sólo usando la derivada covariante se obtiene un vector de aceleración nulo tal como cabía esperar a partir del cálculo en coordenadas cartesianas.

**Caso general**

En una variedad diferenciable o una [hipersuperficie](http://es.wikipedia.org/wiki/Hipersuperficie) de , por otra parte, el concepto de derivada direccional se define a partir del [espacio tangente](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_tangente) a cada punto. En el caso general al presentar la variedad o la hipersuperficie [curvatura](http://es.wikipedia.org/wiki/Curvatura), los espacios tangentes de cada punto difiere del de los puntos cercanos y por tanto se necesita alguna manera de "conectar" o identificar vectores de diferentes espacios vectoriales, mediante una [conexión sobre la variedad](http://es.wikipedia.org/wiki/Conexi%C3%B3n_%28matem%C3%A1tica%29).

En una [variedad riemanniana](http://es.wikipedia.org/wiki/Variedad_riemanniana) comúnmente se escoge una conexión (sin torsion) que sea compatible con la métrica, expresada por las componentes del [tensor métrico](http://es.wikipedia.org/wiki/Tensor_m%C3%A9trico) , en el sentido de que:



**Derivada covariante de un tensor**

En las secciones anteriores la discusión de la derivada covariante se ha limitado a un campo vectorial contravariante. Pero la derivada covariante puede extenderse a otros tipos de [campos tensoriales](http://es.wikipedia.org/wiki/Campo_tensorial) definidos sobre una variedad de Riemann. Para extender la definición usa el hecho de que la derivada parcial de un escalar coincide con la derivada covariante parcial de dicho escalar, es decir:



Así para calcular la derivada covariante parcial de una [1-forma](http://es.wikipedia.org/wiki/1-forma) se considera su contracción con un campo vectorial contravariante y teniendo en cuenta que la derivada covariante en una derivación para la cual vale la regla del producto:



Esto lleva a la siguiente relación entre componentes:



Para un tensor de tipo (p,q) general se tendrá:



**Propiedades**

En lo anterior se ha considerado la noción de derivada covariante de manera naturalista extendiendo a coordenadas curvilíneas la noción de derivada parcial, ese enfoque conduce a un operador de derivación covariante con las siguientes propiedades:

1. Linealidad: Para todo A y B de y cualesquiera : 
2. [Regla de Leibniz](http://es.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Leibniz):
3. Comutatividad con la contracción:
4. Consistencia con la noción de [vector tangente](http://es.wikipedia.org/wiki/Vector_tangente):

Otra posibilidad es definir una derivada covariante más formalmente es construir un operador que satisfaga por construcción las propiedades anteriores.

»